

**Óbudai Egyetem
Alba Regia Műszaki Kar
Geoinformatikai Intézet**



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

LEO MŰHOLD-FORMÁCIÓK MEGVALÓSÍTHATÓSÁGI VIZSGÁLATA

Szerző: **Szántó Marcell**
földmérő és földrendező mérnöki
BSc. szak, IV. évf.

Konzulens: **Dr. Földváry Lóránt**
egyetemi docens

Székesfehérvár, 2016

Tartalomjegyzék

Kivonat	2
1 Bevezetés	3
2 A műholdra ható erők	4
2.1 Föld tömegvonzása	5
2.2 Egyéb égitestek tömegvonzása:	6
2.3 Egyéb égitestek közvetett hatása	6
2.4 Nem konzervatív erők hatása	6
3 Vizsgálati módszerek	7
3.1 Pályaintegrálás	7
3.1.1 Negyedfokú Runge-Kutta módszer[]	8
3.1.2 Adams-Moulton féle becslő-korrigáló módszer []	8
3.1.3 Kezdeti paraméterek meghatározása	9
3.2 Vizsgálendő mennyiségek	9
3.2.1 Irányvonal.....	10
3.2.2 Távolságváltozás	10
4 Műhold-formációk vizsgálata	12
4.1 Kezdeti paraméterek	13
4.2 Pendulum	14
4.3 Bender.....	17
4.4 TRIPEN	19
5 Konklúzió.....	22
Felhasznált irodalom	24

Kivonat

A dolgozat témája az eddig ismert és újonnan tervezett gravimetriai célú LEO¹ műhold-formációk megvalósíthatóságának vizsgálata valódi nehézségi erőterben. A kutatás egy korábbi TDK dolgozatom folytatásának tekinthető. Jelen dolgozatban a műhold-formációk egyes műholdpályáinak integrációja valódi nehézségi erőterben történik, EGM08 geoid modell használatával, és az egyéb égitestek tömegvonzásának figyelembevételével. A pályaintegrálást az Adams-Moulton módszerrel végeztem. A pályaintegrálás során egy olyan időbeli felbontást választottam, amely mellett a pálya kellően részletes, de a numerikus hibák hatása még elhanyagolható. Ezt követően elvégeztem az egyes műholdformációk vizsgálatát. Ezen vizsgálatok kitérnek többek közt a műholdak közti összelátás szögének változására, valamint a távolságváltozás mértékére, melyek kritikus feltételei a műhold-formációknak. Összehasonlításra kerül továbbá a korábbiakban kiszámított gömbszimmetrikus, homogén tömeg körül keringő, és a valóságot jobban tükröző, EGM08 geoid körül keringő műholdak pályája.

¹ Low Earth Orbiter, magyarul alacsony Földkörüli pályán keringő műhold

1 Bevezetés

A Földünk nehézségi erőterét, tömegeloszlását és tömegátrendeződéseit megfigyelni hivatott műholdas gravimetriai kísérlet, a GRACE² a végéhez közeledik. A műholdak működése belátható időn belül teljesen leáll. Ahhoz, hogy ezentúl is időben változó geoid modelleket tudjunk meghatározni, további űrgravimetriai mérésekre van szükség. A GRACE projekt folytatásának (GRACE Follow-On) megvalósítása jelenleg is folyamatban van. A műholdpár fellövésére hivatalosan 2017-ben kerül sor, de a gyakorlat azt mutatja, hogy akár 2-3 éves késést is szenvedhet a pályára állítás, számos elhalasztás okán. Elődjéhez hasonlóan a GRACE Follow-On várható élettartama is 5 év, és bár a GRACE ezt jócskán túlszárnyalta, erre nem lehet biztosan alapozni. Szükség van további gravimetriai műholdakra, valamint a pontosság és térbeli felbontás javítására. Erre a célra az alacsony földköri pályán keringő, vagyis LEO műhold-formációkra épülő űrgravimetriai mérések tűnnek a legbiztosabbnak. A nagyobb pontosságon és a jobb térbeli felbontáson kívül az új műhold-formációk célja a GRACE hátrányainak elkerülése, javítása. Egyik legnagyobb hátránya, hogy mivel mindkét műholdja ugyanazon a közel poláris (89°-os inklinációjú) pályán kering, így a műholdak közti mérések is ebben az irányban – a paralelkörökre közel merőlegesen – történnek. Ebből kifolyólag a mérések érzéketlenek a paralelkör irányú változásokra, tehát az ezen adatokból létrehozott geoid modellek nem irányfüggetlenek, ami egy észak-déli sávok formájában jelentkező szabályos hibához, ún. "stripping" hibához vezetett [1].

A kutatás előző [2] részében bemutatásra kerültek a megvalósításhoz legközelebb álló műhold-formációk, valamint sor került azok bizonyos vizsgálatára, de csak gömbszimmetrikus nehézségi erőterben. Ezek a vizsgálatok így csak közelítő értékeket adhattak, de a vizsgálatok első lépéseként a számítások egyszerűsége és gyorsasága miatt szükségesek voltak. A vizsgálat folytatása, és a műhold-formációk megvalósíthatóságának bizonyítása érdekében további komolyabb számítási eljárásokra és hosszabb időt igénybe vevő szimulációkra és számításokra van szükség. Továbbá a kétféle eljárás eredményeinek összehasonlításával fény derül az előzetes vizsgálatok pontosságára, valamint a gömbszerű Föld körül keringő és a valódi erőterben keringő műholdformációk eltéréseinek mértékére.

Tekintve, hogy jelen dolgozat egy előző folytatását képezi így az ismétlést elkerülendő az előzőben tárgyalt és ismertetett alapfogalmak, műhold-formációk és vizsgálati eredmények ismertnek tekintettek, illetve azokról csak néhány szó esik.

² Gravity Recovery And Climate Experiment

2 A műholdra ható erők

A műholdak keringésének szimulációjához, és a pályaszámításhoz tisztában kell lenni a műholdra ható erőkkel, valamint azok hatásával. Mivel az eddigi számítások egy pontszerű tömegtest körül keringő testre hatottak, így célszerű ebből kiindulni. Egy pontszerű M tömeg körül a műhold a (2.1) egyenlet szerint kering. (A továbbiakban egy valamilyen inerciális rendszerben értelmezett \mathbf{r} vektor a műhold helyvektora, $\dot{\mathbf{r}}$ a sebességvektora és $\ddot{\mathbf{r}}$ a gyorsulásvektora.)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.1)$$

A valóságban azonban bonyolultabb, egy műholdra sokkal több erő van hatással így a mozgását leíró (2.2) egyenlet is komplikáltabb ennél. A (2.1) egyenlet kiegészül egy a műholdpályára ható perturbációs erőket összefoglaló \mathbf{k}_s vektorral.[3]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{k}_s \quad (2.2)$$

A műholdpályát zavaró erőhatások:

$\ddot{\mathbf{r}}_F$ – a Föld nem szimmetrikus, inhomogén tömegeloszlása által előidézett gyorsulások

$\ddot{\mathbf{r}}_{CB}$ – egyéb égitestek tömegvonzása (Nap, Hold, bolygók), melyek közül legjelentősebb a Nap és a Hold hatása, $\ddot{\mathbf{r}}_N, \ddot{\mathbf{r}}_H$

$\ddot{\mathbf{r}}_{ind}$ – egyéb égitestek közvetett hatása

- óceáni árapály

- merev földkéreg árapály

- pólusmozgás

$\ddot{\mathbf{r}}_a, \ddot{\mathbf{r}}_s$ - a műholdat érő nem konzervatív erők: atmoszférikus fékezés és a nap sugárnyomása

A \mathbf{k}_s vektor tehát ezekből az összetevőkből épül fel.

$$\mathbf{k}_s = \ddot{\mathbf{r}}_F + \ddot{\mathbf{r}}_{CB} + \ddot{\mathbf{r}}_{ind} + \ddot{\mathbf{r}}_a + \ddot{\mathbf{r}}_s \quad (2.3)$$

2.1 Föld tömegvonzása

A valódi erőtér gömbtől való eltéréseit jellemző $\ddot{\mathbf{r}}_F$ gyorsulás levezethető a Föld tömegvonzási potenciálját leíró gömbfüggvény-sor átalakításával.

$$V = \frac{kM}{r} \left[\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \varphi) \right] \quad (2.4)$$

$$V = \frac{kM}{r} + \frac{kM}{r} \left[\sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \varphi) \right]$$

r, λ, φ - gömbi koordináták (távolság, szélesség, hosszúság)

R – közepes Földsugár

kM - Newton-féle tömegvonzási állandó és a Föld tömegének szorzata

n, m - gömbfüggvény-sor foka és rendje

$\bar{P}_{n,m}$ - normalizált Legendre-függvény

$\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ – normalizált gömbfüggvény (már néven Stokes) együtthatók.

A (2.4) egyenletben a $\frac{kM}{r}$ tag a gömbszimmetrikus tömeg potenciálját leíró rész, mely gradiense az M tömegpont körül keringő műhold (2.1) egyenletét adja.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V_{gömb} = -\nabla \frac{kM}{r} = -\frac{kM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{kM}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.5)$$

A (2.5) egyenletben és a továbbiakban a *nabla* operátor a gradienst jelöli:

$$\nabla = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z]^T$$

A (2.4) egyenlet második tagja a geoid gömbtől való eltéréseit írja le, vagyis ennek gradiense a Föld aszimmetrikus, inhomogén tömegeloszlásából következő gyorsulások egyenletét eredményezi.

$$\ddot{\mathbf{r}}_f = -\nabla \left(\frac{kM}{r} \left[\sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \varphi) \right] \right) \quad (2.6)$$

2.2 Egyéb égitestek tömegvonzása:

Az egyéb égitestek tömegvonzása által keltett $\ddot{\mathbf{r}}_{CB}$ gyorsulás az egyes égitestek zavaró hatásának összegeként értelmezhető. Egy M égitest által keltett hatását leíró képlet a levezetés [4] mellőzésével:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = km_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|^3} \right) \quad (2.7)$$

\mathbf{r}_M – M égitest távolsága a Földtől

m_M – M égitest tömege

2.3 Egyéb égitestek közvetett hatása

A merev földkéreg árapálya, valamint az óceáni árapályok szintén hatással vannak a műhold mozgására, így hosszú távú számításoknál ezt is figyelembe kell venni. Ezek a hatások főként a Nap és a Hold indirekt hatásából adódnak. A képlet levezetés [5] nélkül:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ind} = \frac{k_2 km_d R_e^5}{2 |\mathbf{r}|^3 |\mathbf{r}_d|^4} (3 - 15 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + 6 \cos \theta \frac{\mathbf{r}_d}{|\mathbf{r}_d|} \quad (2.8)$$

m_d – a zavaró hatást keltő égitest tömege (Nap, Hold)

\mathbf{r}_d – az égitestre mutató helyvektor geocentrikus koordinátarendszerben

θ – \mathbf{r}_d vektor és a műhold helyvektora \mathbf{r} által bezár szög

k_2 – a Föld rugalmasságát leíró Love-féle szám

R – a Föld egyenlítői átmérője

2.4 Nem konzervatív erők hatása

Ahogy a LEO műholdak neve is mutatja, alacsony pályán keringenek ahol a légkör még elég sűrű ahhoz, hogy befolyásolja a mozgásukat. A légköri fékezés és a Nap sugárnyomásának hatása olyan disszipatív erő, amely nagyban függ a műhold felépítésétől, anyagától és formájától. Egyik hatás sem modellezhető hitelesen, ellenben a fedélzeti gyorsulásmérőkkel mérhető, és a mért eredmények alapján a pálya valós időben módosítható, ezért ezek nem szerepelnek a szimulációban.

3 Vizsgálati módszerek

A numerikus pályaintegrálás során a műholdra ható valamennyi erő pozícióként számítandó és ezek eredménye képi majd a következő pozíció kiinduló paramétereit, éppen ezért nincs lehetőség párhuzamos programozásra, több szálon futó számításra, vagyis a számítások a használt geoid modell fokszámának függvényében meglehetősen hosszú időt vehetnek igénybe. A számítások helyességének ellenőrzése végett mind az összelátás szöge mind a távolságváltozás mértéke két-két egymástól független számítás alapján került programozásra. A számítási módszerek helyességét igazolja, hogy a két számítás eredménye megegyezik.

3.1 Pályaintegrálás

A lehető legpontosabb műholdpálya meghatározás érdekében a pályaszámítások numerikus integrálással történtek. A legmegfelelőbb módszer a pályaintegráláshoz egy korábbi dolgozat [6] eredményei alapján került kiválasztásra.

A műhold mozgását valódi erőterben leíró (2.2) egyenletet kétszeri integrálása a műholdpályát eredményezi. A mozgásegyenletet a triviális $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}$ egyenlettel kiegészítve a kétszeres integrál egyszerire csökkenthető. A mozgásegyenletet és az $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}$ egyenletet egyenletrendszerbe és mátrixba foglalva a (3.1) differenciálegyenletet hozható létre a helyzetvektort $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix}$ helyettesítéssel definiálva

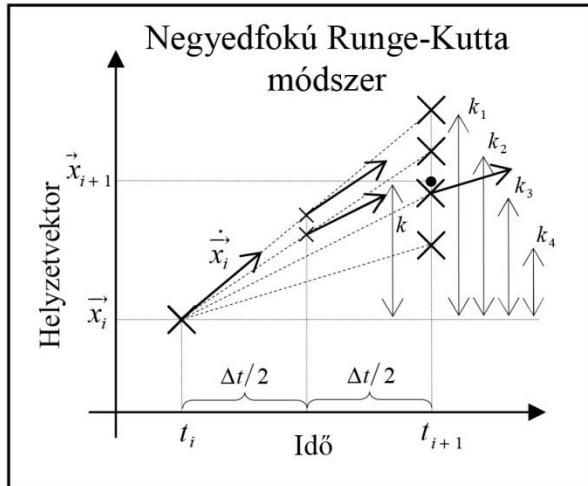
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nabla V & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}_S \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Az egyenlet jelölése a továbbiakban $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$. Az egyenletrendszer alapján számítható tehát a gyorsulás-, sebesség- és helyvektor az idő függvényében, a numerikus integrálással pedig számítható a műholdpálya. Az eddigiek ismeretében a derivált értéke (gyorsulás és sebesség) bármely ismert helyen számítható. A numerikus integrálás lényege, hogy valamely kezdeti \mathbf{x}_i (hely és sebesség) ismeretében számítható $\dot{\mathbf{x}}_i$ (sebesség és gyorsulás), majd t_i időpont felhasználásával számítható a Δt idő alatt a helyzetvektorban bekövetkezett $\Delta \mathbf{x}$ változás, vagyis a t_{i+1} időponthoz tartozó \mathbf{x}_{i+1} helyzetvektor. A számítási folyamat ismétlésével \mathbf{x}_0 -ból tetszőleges \mathbf{x}_i -ig számítható a műholdpálya.

A pályaszámítás kétféle módszerrel történt, első lépésben az első négy helyzetvektor számítása a negyedfokú Runge-Kutta módszerrel. Erre a további pontok számításához használt Adams-Moulton-féle becslő-korrigáló módszer miatt van szükség, mivel ez a számítás 4 kezdeti pontot igényel.

3.1.1 Negyedfokú Runge-Kutta módszer[7]

A deriváltat Δt intervallumon konstansnak feltételezve a növekmény értéke négyfajta becsült derivált érték súlyozott átlagaként számítható. A négy növekményből kettő a középpontban, kettő a kezdő- és végpontban számítandó a következő (3.2) egyenletek alapján.



3.1-1. ábra - Negyedfokú Runge-Kutta módszer (forrás:[6])

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, \mathbf{x}_i) \cdot \Delta t \\
 k_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{k_1}{2}\right) \cdot \Delta t \\
 k_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{k_2}{2}\right) \cdot \Delta t \\
 k_4 &= f(t_i + \Delta t, \mathbf{x}_i + k_3) \cdot \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Az átlagos növekmény a súlyozott átlagot felhasználva Δt nyert helyzet az alábbi:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{3.3}$$

3.1.2 Adams-Moulton féle becsülő-korrigáló módszer [8]

A módszer az általános becsülő-korrigáló eljárás egyszerűbb alakra hozott, gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott formája. Két lépésből, becslésből és korrigálásból áll, és mindkét lépés polinom illesztésen alapszik. Negyedfokú polinom alkalmazása esetén a (3.7)-es zárt formula az eredmény. Első lépésben egy másik módszerrel az első meg kell határozni négy pontot, valamint az ide tartozó négy deriváltat a (3.4) egyenlet alapján.

$$\dot{\mathbf{x}}_j = f(\mathbf{x}_j, t_j) \tag{3.4}$$

Az első négy derivált érték alapján \mathbf{x}_{i+1} becsült érték meghatározható a (3.5) egyenletnek megfelelően.

$$\mathbf{x}_{i+1}^b = \mathbf{x}_i + \frac{55\dot{\mathbf{x}}_i - 59\dot{\mathbf{x}}_{i-1} + 37\dot{\mathbf{x}}_{i-2} - 9\dot{\mathbf{x}}_{i-3}}{24} \cdot \Delta t \tag{3.5}$$

A becsült \mathbf{x}_{i+1}^b értékből már számítható $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$.

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = f(\mathbf{x}_{i+1}^b, t_{i+1}) \tag{3.6}$$

Végül pedig ki kell számítani a korrigált \mathbf{x}_{i+1} értéke.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{9\dot{\mathbf{x}}_{i+1} - 19\dot{\mathbf{x}}_i + 5\dot{\mathbf{x}}_{i-1} - \dot{\mathbf{x}}_{i-2}}{24} \cdot \Delta t \tag{3.7}$$

3.1.3 Kezdeti paraméterek meghatározása

Az egyes műholdformációk műholdjainak pozíciói Kepler-féle pályaelemeikkel adottak, így a számításhoz szükséges ezek átalakítása egy kezdeti hely- és sebességvektor formájára.[9]

$$(a, e, i, \omega, \Omega, M) \rightarrow (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

Elsőként az excentrikus E anomáliát kell előállítani az M középanomáliából, mely egy iterációs folyamat ahol a kezdőérték a középanomáliával egyenlő.

$$\begin{aligned} E_0 &= M \\ E - e \sin E &= M \end{aligned} \quad (3.8)$$

Meg kell állapítani a hely- és sebességvektort egy segéd koordinátarendszerben, mely z tengelye merőleges a pályasíkra, x tengelye pedig a perigeum pontba mutat.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{na}{1 - e \cos E} \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Az keresett inerciális koordinátarendszerbeli hely- és sebességvektor (3.10) egyenletben leírt forgatómátrixok segítségével állítható elő a segéd koordinátarendszerbeli vektorokból.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{r}} &= R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2 Vizsgálandó mennyiségek

A műholdformációk elemeinek relatív elhelyezkedése egy igen fontos kérdés, hiszen ez szabja meg a mérési értékek pontosságát, így közvetve a geoid modell felbontását, izotrópikus jellegét. Az elhelyezkedésnek több technológiai korlát és követelmény szab határt. A lehetséges jövőbeli formációknak két fontos feltételt kell teljesíteniük: [10]

- a műholdak közötti távolságváltozásnak, vagyis a sebességkülönbségnek (range rate) közel ± 10 m/s-on belül kell lennie
- a két műholdon lévő távmérők irányvonala (line of sight) által bezárt szögnek 30° alattinak kell lennie

Az első feltétel teljesítése lehetővé teszi a heterodin lézerek használatát a műholdak közti távolságmérés során. A második feltételben említett 30° -os szög a műholdak oldalra dőlésére (yaw) és bólintására (pitch) vonatkozik. Az összelátási szög korlátozásának magyarázata, hogy a hosszabb élettartam, alacsony energiahasználat és a potenciális hibalehetőségek csökkentése érdekében a műholdon minimalizálandó a mozgó alkatrész használata, illetve a mozgás mértéke. Ahhoz, hogy a műholdak közötti távolságváltozás mérése folyamatos

legyen, szükség van a távolságot mérő lézersugár irányítására. A megszabott intervallum pedig a lézert irányító berendezés mozgását korlátozza.

3.2.1 Irányvonal

A két műhold közötti összelátás szöge a következők szerint számítható. Első lépésben képezni kell A és B műhold helyvektorának különbségét, mely eredménye a két tömegpontot összekötő, B -ből A -ba mutató \mathbf{r} vektor.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (3.11)$$

A műhold haladási irányát az adott időpontban legjobban leíró vektor a tömegpont sebességvektora (3.12), mely a pálya érintőjének irányába mutat.

$$\mathbf{v}_B(v_B^x, v_B^y, v_B^z) \quad (3.12)$$

E két vektor, \mathbf{r} és \mathbf{v}_B által bezárt szög megadja az η -t, összelátás szögét az adott időpontban. A keresett szög a két vektor skaláris szorzatának segítségével számítható.

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{v}_B| |\mathbf{r}| \cos \eta \quad (3.13)$$

A (3.13) egyenletet a keresett szög koszinuszára átrendezve:

$$\cos \eta = \frac{|\mathbf{v}_B| |\mathbf{r}|}{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}} \quad (3.14)$$

Alternatív módszerként a tömegpont haladásának pillanatnyi iránya közelíthető a B pont $i + 1$ -edik és i -edik időpontbeli pozícióvektorának különbségeként.

3.2.2 Távolságváltozás

A két műhold közötti távolságváltozás mérését végrehajtó eszköznek megvannak a technikai korlátai, ezért a műholdformációk tervezésénél figyelembe kell venni a távolságváltozás (range rate) mértékét. Ez a következőképp számítható.

Adott két mozgó tömegpont, a két műhold. Jelük A és B . Koordinátáik: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. A köztük lévő távolság (range) egy adott pillanatban a következő egyszerű képlettel számítható:

$$R = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (3.15)$$

Mivel a műholdak koordinátái dinamikusan változnak az idő függvényében, ezért a köztük lévő távolság is változik. Ennek idő szerinti első deriváltja megadja a tömegpontok közötti távolságváltozás mértékét.

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{2[(x_B - x_A)(v_B^x - v_A^x) + (y_B - y_A)(v_B^y - v_A^y) + (z_B - z_A)(v_B^z - v_A^z)]}{2\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \quad (3.16)$$

$$\dot{R} = \frac{[(x_B - x_A)(v_B^x - v_A^x) + (y_B - y_A)(v_B^y - v_A^y) + (z_B - z_A)(v_B^z - v_A^z)]}{R} \quad (3.87)$$

A egyszerűbb számíthatóság érdekében létrehozható egy az eredetivel egyállású relatív koordináta-rendszer, ahol A pont az új rendszer origója.

$$A(x_A, y_A, z_A) = A(0,0,0)$$

A relatív gyorsulás a műholdak között:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \\ v_r^x &= v_B^x - v_A^x \\ v_r^y &= v_B^y - v_A^y \\ v_r^z &= v_B^z - v_A^z \end{aligned} \quad (3.98)$$

A (3.18) egyenleteket behelyettesítve a (3.17) egyenletbe:

$$\dot{R} = \frac{[x_B v_r^x + y_B v_r^y + z_B v_r^z]}{R} \quad (3.19)$$

Vagyis a relatív koordináta-rendszerben a távolságváltozás a B műhold és a relatív gyorsulásvektor függvénye.

$$\dot{R} = f(x_B, y_B, z_B, \mathbf{v}_r) \quad (3.20)$$

Amennyiben a műholdak sebességvektorai a koordináta-tengelyekkel bezárt szögekkel $\mathbf{v}_A(S_A, \Phi_A, \Lambda_A)$, $\mathbf{v}_B(S_B, \Phi_B, \Lambda_B)$ vannak megadva, levezethető a sebességvektorok levetítésével a két pontot összekötő \mathbf{r} vektorra. A \mathbf{v}_A és \mathbf{v}_B sebességvektorok \mathbf{r} vektorra eső vetületei $S_A \cos \varepsilon$ és $S_B \cos \delta$, tehát:

$$\dot{R} = -S_A \cos \varepsilon + S_B \cos \delta \quad (3.21)$$

A számításhoz szükséges ε és δ szögek a vektorok skaláris szorzatának segítségével számíthatók.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r} &= |\mathbf{v}_A| |\mathbf{r}| \cos \varepsilon \\ \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r} &= |\mathbf{v}_B| |\mathbf{r}| \cos \delta \end{aligned} \quad (3.22)$$

A (3.22) egyenleteket a kérdéses szögekre átrendezve:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{v}_A| |\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}}{S_A |\mathbf{r}|} \\ \cos \delta &= \frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{v}_B| |\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}}{S_B |\mathbf{r}|} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Az egyes vektorok skaláris szorzata a (3.24) egyenletek alapján is számíthatóak, ahol x_r, y_r és z_r \mathbf{r} vektor koordináta-tengely irányú komponensei, melyek a két műhold pillanatnyi koordinátaiból a (3.25) egyenletekkel számíthatók.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r} &= v_A^x x_r + v_A^y y_r + v_A^z z_r \\ \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r} &= v_B^x x_r + v_B^y y_r + v_B^z z_r\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}x_r &= x_B - x_A \\ y_r &= y_B - y_A \\ z_r &= z_B - z_A\end{aligned}\quad (3.25)$$

\mathbf{v}_A és \mathbf{v}_B koordinátatengelyekkel párhuzamos összetevői pedig:

$$\begin{aligned}v_A^x &= S_A \sin \Phi_A \cos \Theta_A \\ v_A^y &= S_A \sin \Phi_A \sin \Theta_A \\ v_A^z &= S_A \cos \Phi_A\end{aligned}\quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}v_B^x &= S_B \sin \Phi_B \cos \Theta_B \\ v_B^y &= S_B \sin \Phi_B \sin \Theta_B \\ v_B^z &= S_B \cos \Phi_B\end{aligned}\quad (3.27)$$

A számítások során mindkét fajta megközelítéshez külön Matlab függvény került programozásra, így ellenőrizhető az eljárások helyessége.

4 Műhold-formációk vizsgálata

A vizsgálatok során sor került a műhold-formációk önálló elemzésére, valamint a korábbi, gömbszimmetrikus nehézségi erőterben történt szimulációk eredményeivel is összehasonlításra kerültek. A pályaintegrációs számítások, a formációk vizsgálata, valamint a grafikonok megjelenítése egytől egyig a Matlab R2015a szoftver segítségével történt.

Előzetes számítások alapján kiderült, hogy az adott magasságban a műholdak keringési ideje nagyjából 5500 másodperc, a számítások ezért egy teljes ciklus biztonságos teljesítése érdekében 6000 másodpercig futottak. A szimulációs vizsgálatok ideje egy véletlenszerűen kiválasztott nap, 2004 június 12.-e. A több mint tíz évvel ezelőtti dátumot az egyéb égitestek pozícióját leíró, aktuális efemerisz adatok hiánya magyarázza, amely korábbi adatok felhasználásával lehetőséget nyújt a műholdat érő erőhatások valós modellezésére. A korábbi dátum nem befolyásolja a vizsgálatok hitelességét, mivel a csillagászati, földforgási és egyéb perturbációt okozó paraméterek jellegüket és nagyságrendjüket tekintve azóta változatlanok.

Az műholdformációk minden egyes műholdjának szimulációja 6-7 órát vett igénybe, vagyis a műholdak számától függően egy formáció műholdpályáinak kiszámítása akár egy

teljes napot is igénybe vehet. Éppen ezért nagyon fontos kideríteni a kétfajta számítási mód között. A gömbszimmetrikus erőterben pár másodpercen belül lefuttatható a kívánt műholdpálya egy periódusa. Vagyis ha szükséges a formációkban az egyes műholdak egymáshoz képesti elhelyezkedésének módosítása, ezzel az egyszerűbb módszerrel gyors előzetes vizsgálatok végezhetőek.

Az újonnan vizsgált értékek azonban csak részben összehasonlíthatóak az eddigiekkel, mivel korábban csak az összelátás szögének változása került elemzésre. A korábban használt, pontszerű tömeg körül keringő műhold pályájának számítására használt program kimeneti adatai csak pozíció vektorokat tartalmaztak, sebességvektort nem, ezért nem voltak meg a távolságváltozás számításához szükséges adatok. Az összelátás szögének vizsgálatát illetően viszont összehasonlításra kerültek a korábbi és új adatok. Fontos kiemelni azonban, hogy az előzőekben a kérdéses szög értéke poláris földrajzi koordináták alapján lett előállítva a következő bekezdésben ismertetett módon.

A szög az A és B műholdat i -edik pillanatban összekötő egyenes azimutjának, valamint a B műhold i -edik és $i + 1$ -edik időpontbeli pozícióját összekötő egyenes azimutjának a különbsége. Erre az egyszerűsítésre a zavartalan körpálya miatt volt lehetőség, hiszen a gömbszimmetrikus erőter miatt a keringési magasság minden pillanatban megegyezik mindkét műhold esetén, így a két műholdat összekötő egyenesre fektetett függőleges síkban a térbeli szög "függőleges" összetevője állandó. A későbbi vizsgálatokban azonban a két térbeli vektor közti szög a korábban ismertetett módon került számításra. Azért, hogy az eredmények összehasonlíthatóak legyenek a korábbi adatok újrafeldolgozásra kerültek a 3.2.1 fejezetben ismertetett alternatív módszerrel, immár térbeli vektorokat használva bemeneti adatokként.

A vizsgálatok során kiderült, hogy a valódi erőterben szimulált műholdak keringési ideje 5480 másodperc (kivéve a Bender formáció második műholdpárját mely keringési ideje 5492 másodperc), vagyis 91,3 perc, míg a gömbszimmetrikus erőterben szimuláltaké két másodperccel rövidebb, azaz 5478 másodperc. Ez az eltérés is hozzájárul a két különböző módon számított műholdpálya eltéréséhez.

4.1 Kezdeti paraméterek

A hely és sebességvektorok km egységben adottak. A 335 km –es kezdeti pályamagasság 6713 km-es kezdeti távolságot jelent a Földhöz kötött koordinátarendszer origójától. A Bender formáció második műholdpárja esetén a pályamagasság 352 km, így az

origótól való távolság 6730 km. A Kepler-féle pályaelemek $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ sorrendben adottak.

Pendulum:

S1: (6713.137 ,0 ,89.5° ,0 ,0 ,90°)

S2: (6713.137 ,89.5° ,0 ,0 ,0.367° ,90.8194°)

Bender:

S1: (6713.137 ,0 ,89.5° ,0 ,0 ,90°)

S2: (6713.137 ,0 ,89.5° ,0 ,0 ,90.8993)

S3: (6730.137 ,0 ,63° ,0 ,0 ,90)

S4: (6730.137 ,0 ,63° ,0 ,0 ,90.8993)

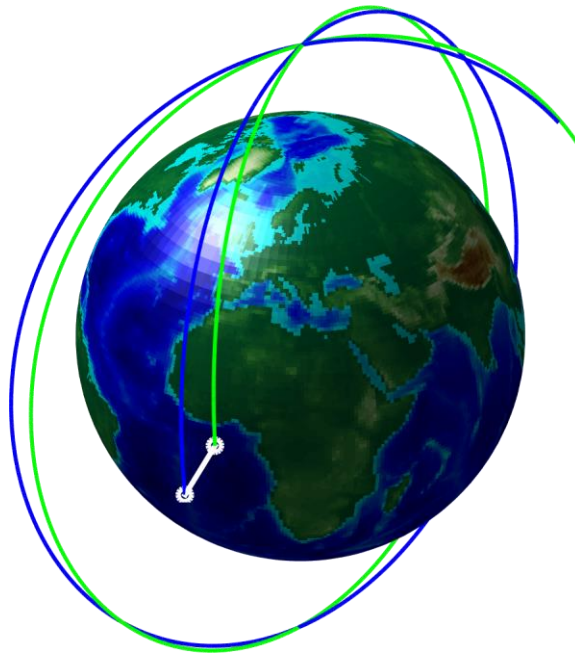
TRIPEN:

S1: (6713.137 ,0 ,89.5° ,0 ,0 ,90°)

S2: (6713.137 ,89.5° ,0 ,0 ,0.367° ,90.8194°)

S3: (6713.137 ,0 ,89.5° ,0 ,0 ,91.6388°)

4.2 Pendulum

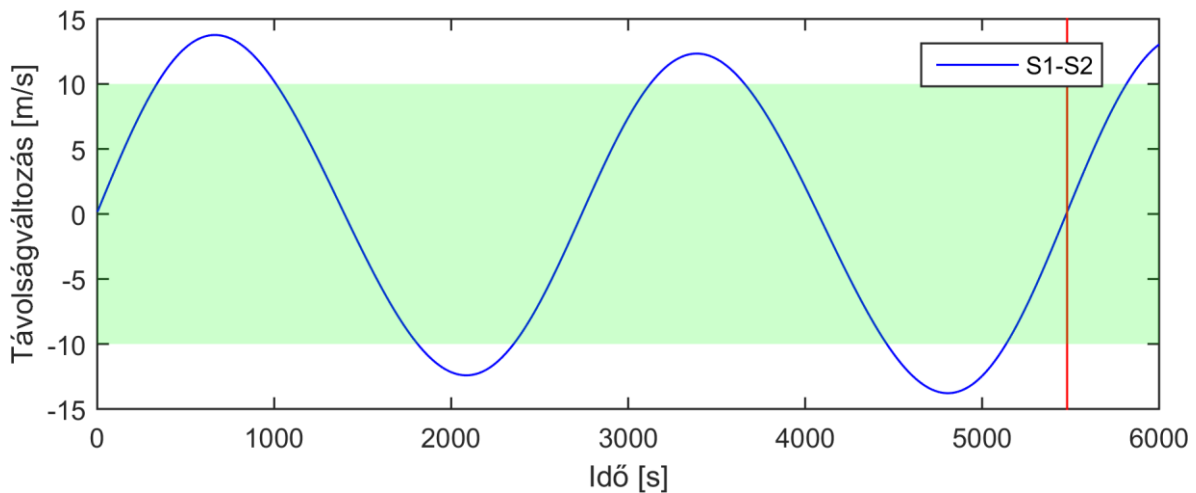


4.2-1. ábra - Pendulum formáció (felnagyított pályaelemekkel az egyszerűbb érthetőség kedvéért)

A Pendulum formáció lényege, hogy egy műholdpár két tagja eltérő felszálló csomóponthosszú pályán kering egymáshoz képest némi késéssel, vagyis eltérő középanomáliával rendelkeznek. A formáció különleges felépítése miatt a mérési eredmények rendelkeznének egy paralelkör irányú komponenssel is, vagyis a GRACE-nél tapasztalt

paralelkör irányú érzéketlenséget hivatottak javítani. Az vizsgálatok során a távolságváltozás értékének elemzése volt az első.

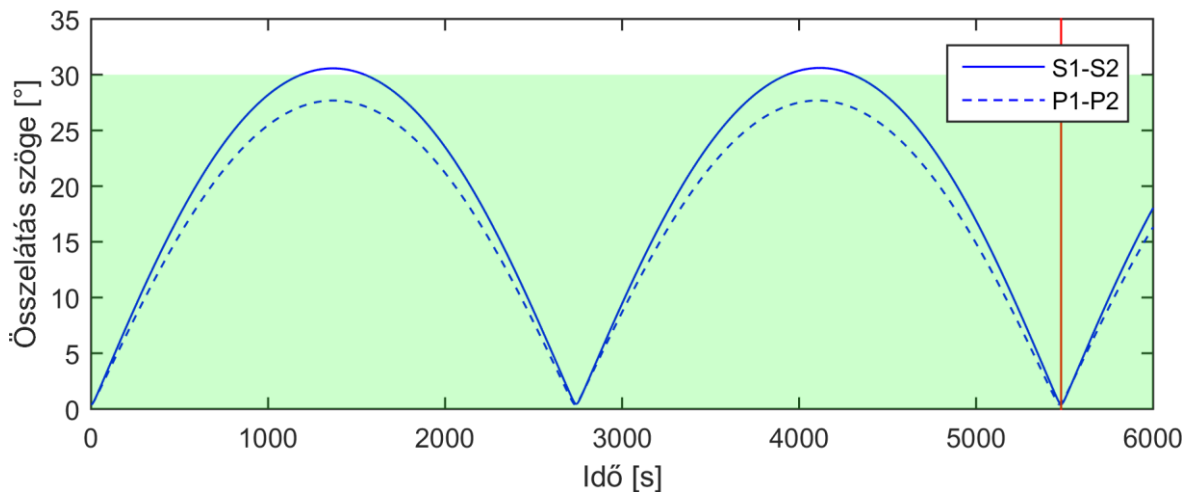
A 4.2-2. ábrán és a továbbiakban az S előjelű függvény a valódi nehézségi erőterben szimulált műholdra utal, míg a P előjelű a korábbi, pontszerű tömeg körül szimulált műholdra. Az S vagy P előjelet követő szám a műholdra utal míg az $S1 - S2$ jelölés a műholdpáronként értelmezhető értékre.



4.2-2. ábra - Távolságváltozás a Pendulum formáció esetén

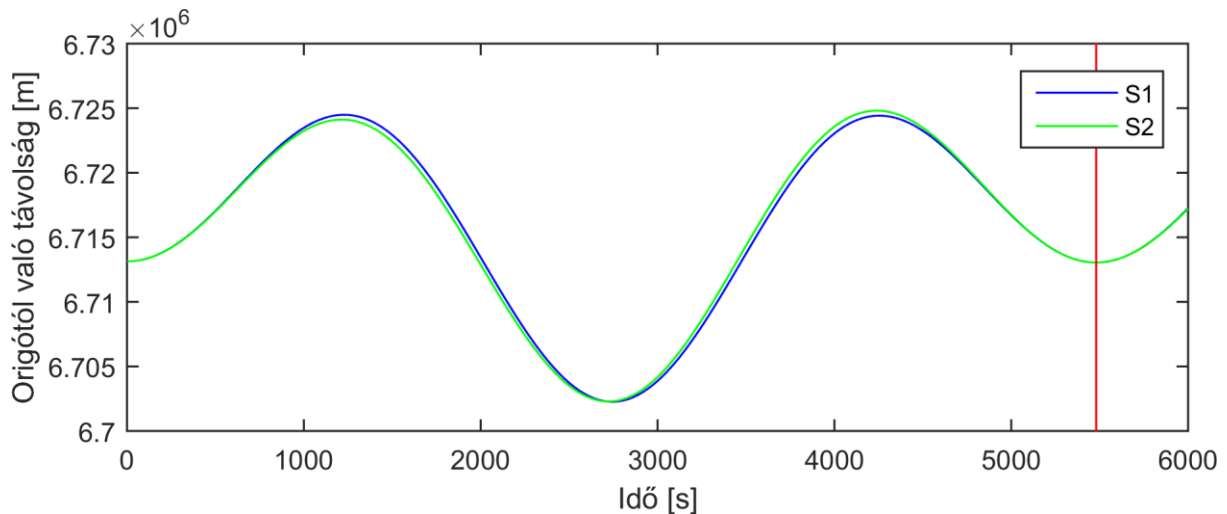
A formáció hibája amint az az elemzésekből is kitűnik, hogy a műholdak közti sebességkülönbség túllépi a feltételekben megszabott határokat. A 4.2-2. ábrán látható a kérdéses érték változása. A halványzöld sáv a $\pm 10 \text{ m/s}$ -os intervallumot reprezentálja, míg a függőleges piros vonal a műholdak keringési periódusidejének végét. A megengedett $\pm 10 \text{ m/s}$ -hoz képesti eltérés maximális értéke 3.7839 m/s . Ez a túllépés nem feltétlenül jelenti, hogy a formáció nem megvalósítható, viszont a heterodin lézerek használatát kizárja.

A következő vizsgálandó érték az összelátás szöge. Mint arról a fejezet elején szó esett, az előző dolgozatban ez az érték az azimutok különbségének eredménye volt, így a szög változását leíró függvény negatív értékeket is felvehetett. A mostani számítási módszer azonban két térbeli vektor hajlásszögeként értelmezi a kérdéses szöget. Belátható, hogy a két térbeli egyenes által bezárt szög azonban csak a $[0; \pi]$ intervallumon értelmezhető. Bár ez a probléma megoldható lett volna az adatsor abszolút értékeinek használatával, a hitelesebb összehasonlítás érdekében mégis szükség volt a korábbi adatok újraszámítása a 3.2.1 fejezt végén leírt alternatív módszer alapján.



4.2-3. ábra - Az összelátás szögének változása a Pendulum formáció esetén

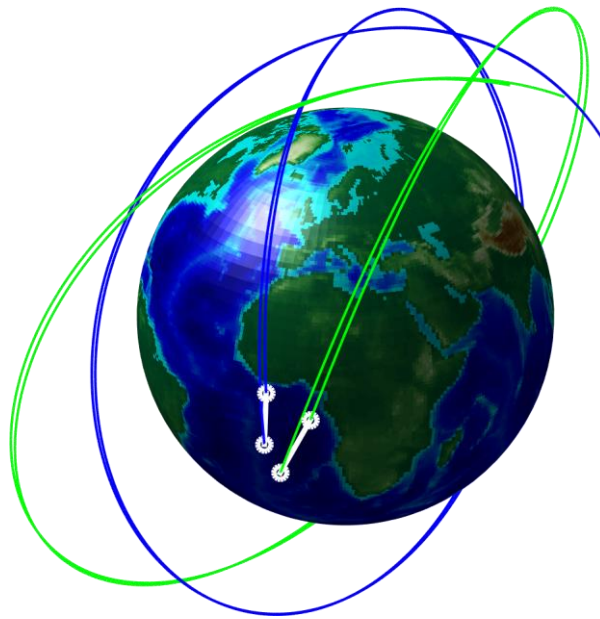
Szemmel láthatóan az S1 függvény túllépi a feltételekben megszabott intervallumot, de ennek a túllépésnek a mértéke mindössze 0.6086° ami jelen esetben nem számottevő. A két adatsor között igen erős, ($r = 0.9999$) korreláció van, ami az eltérő pályaszámítási és vizsgálati módszerek helyességére utal. A két adatsor között a maximális eltérés 2.9233° . Az eltéréseket a különböző számítási módszerek és a valódi erőter gömbszimmetrikustól való eltérése eredményezi.



4.2-4. ábra - Az origótól való távolság változása a Pendulum formáció esetén

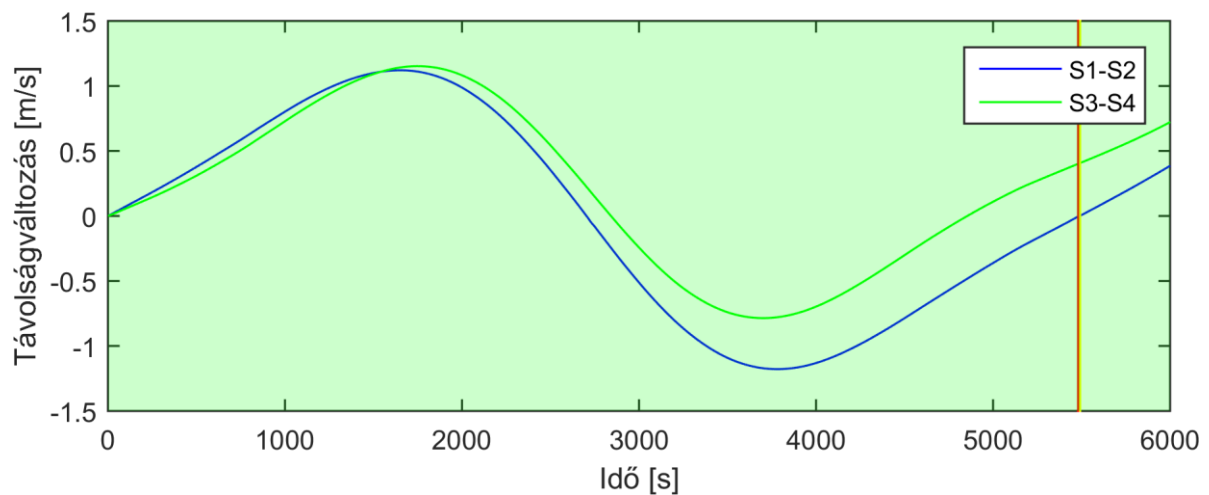
A 4.2-4. ábra a két műhold origótól való távolságának változását ábrázolja. A periódus első és utolsó eleme közti eltérés tízméteres nagyságrendű, jelen esetben $-91m$. Ez semmi esetre sem utal hibás működésre, épp ellenkezőleg, az 5480. és az 1. elem különbségének negatív volta a valóságot tükrözi, a jelenség a perturbáló erők hatását mutatja. Éppen ezen hatások miatt elengedhetetlen LEO műholdak esetén a gyakori (akár napi több száz) pályamanőver használata.

4.3 Bender



4.3-1. ábra - Bender formáció (felnagyított pályaelemekkel)

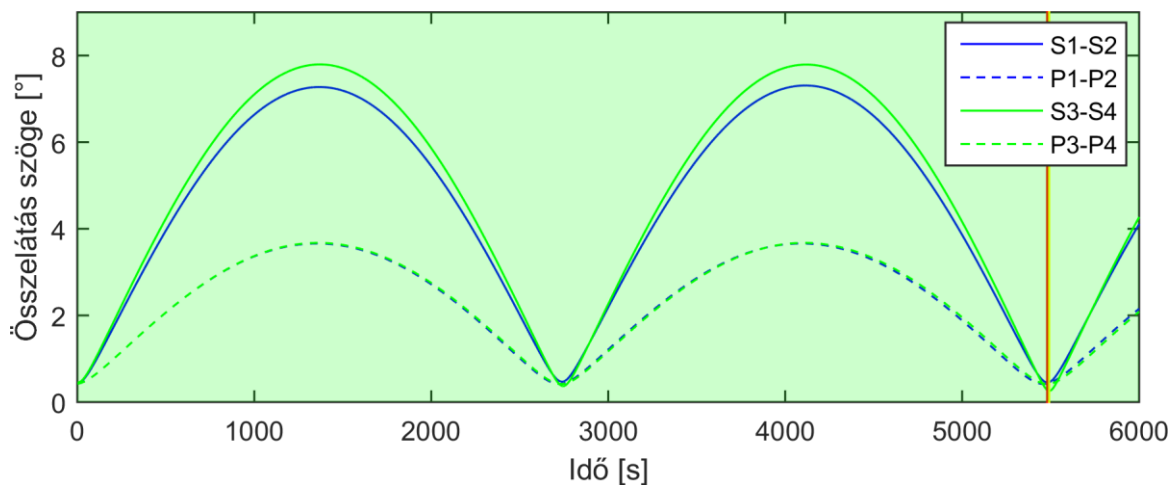
A Bender formáció lényege, hogy egy a GRACE-hez hasonló műholdpár kiegészítéseként, egy nagyobb inklinációjú ($i = 63^\circ$), és nagyobb keringési magasságú pályán egy másik műholdpár is működik. A kiegészítés az első pártól függetlenül működve biztosítaná a mérési eredményeket, a nagyobb inklináció miatt paralelkör irányú összetevőkkel.



4.3-2. ábra - Távolságváltozás a Bender formáció esetén

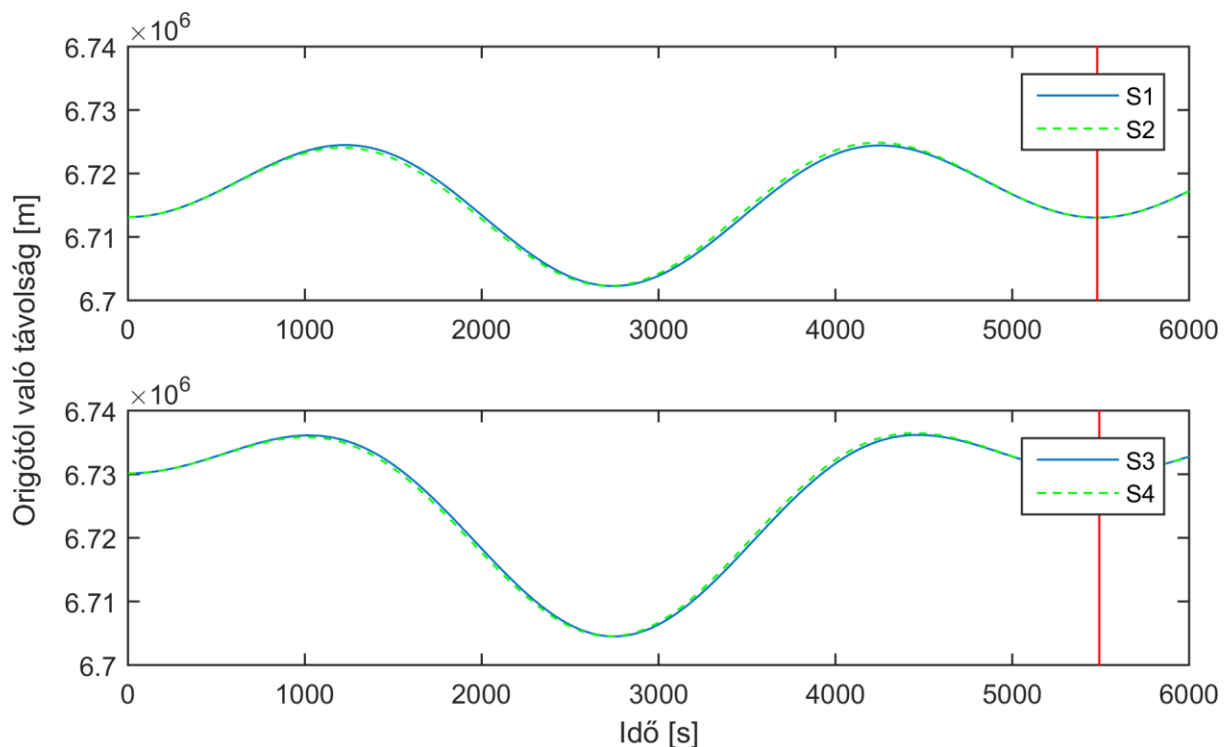
Mivel páronként a két-két műhold ugyanazon a pályán kering csak egymáshoz képest lemaradva (vagyis középánomáliájuk eltérő), ezért a sebességükben sincs túl nagy különbség. A 4.3-2. ábrán látható, hogy a távolságváltozás mértéke meg sem közelíti a határértéket. A két pár távolságváltozását ábrázoló görbék eltérését a különböző pályamagasság okozza. Látható, hogy a nagyobb magassággal, nagyobb sebességkülönbség jár, azonban a

sebességkülönbségek értéke kevésbé változik. Ez részben a ritkább légkörnek köszönhető, részben pedig a nagyobb Földtől való távolságnak.



4.3-3. ábra - Az összelátás szögének változása a Bender formáció esetén

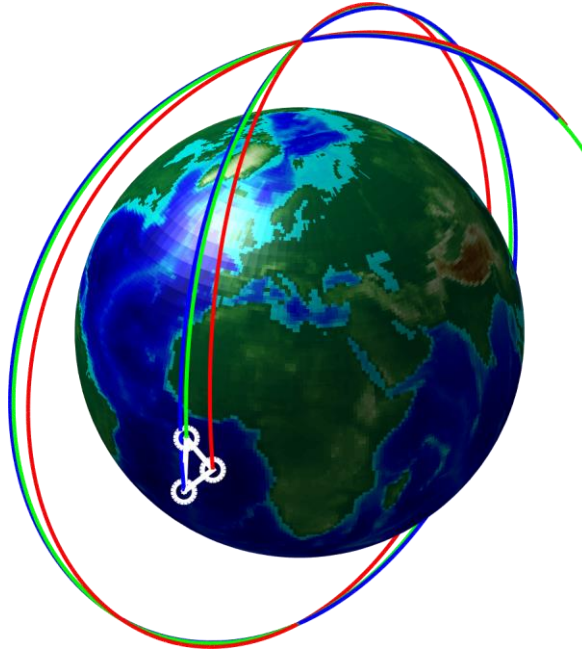
Az összelátás szögét illetően a távolságváltozáshoz hasonlóan elmondható, hogy az azonos pálya miatt az értékek meg sem közelítik a feltételekben megszabott intervallum határát. A 4.3-3. ábrán szintén megfigyelhető, hogy a nagyobb pályamagasságon keringő S3 – S4 műholdpár esetén az összelátás szöge nagyobb, mint az első pár esetén. A két külön módszerrel számított értékek között az első pár esetén a legnagyobb eltérés 3.6483° , míg a második pár esetén 4.1214° . A két-két adatsor között szemmel láthatóan is erős a korreláció, értékük $r = 0.9989$ és $r = 0.9993$.



4.3-4. ábra - Az origótól való távolság változása a Bender formáció esetén

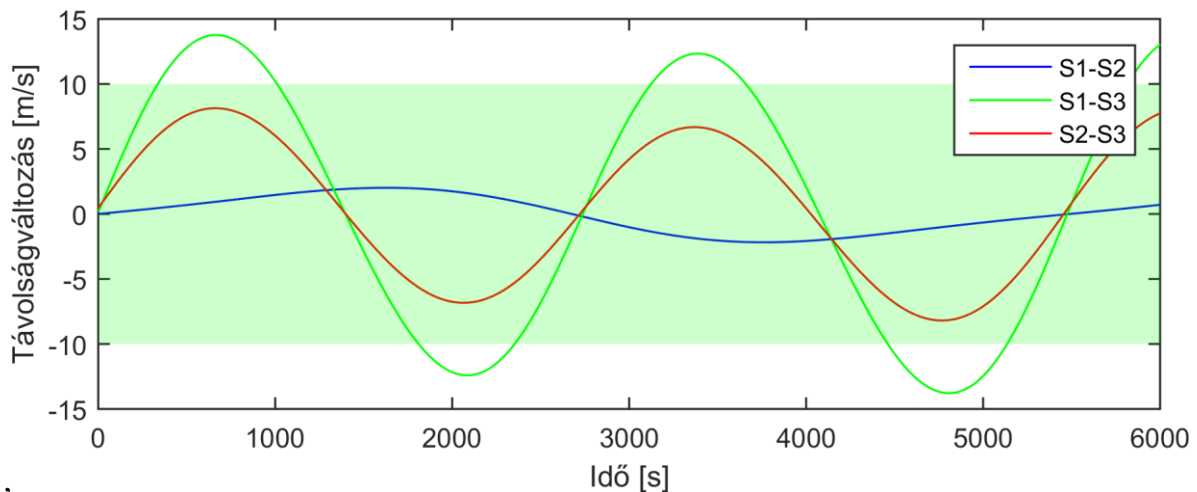
A műholdak origótól való távolságát illetően elmondható, hogy a változás mindkét esetben egységes. Az $S1 - S2$ műholdpár egy 22 km -es, míg az $S3 - S4$ a nagyobb keringési magasság miatt egy 31 km -es intervallumon belül mozog. Az előzőekben tapasztalt magasságcsökkenés itt is észrevehető, rendre 91 és 72 méter.

4.4 TRIPEN



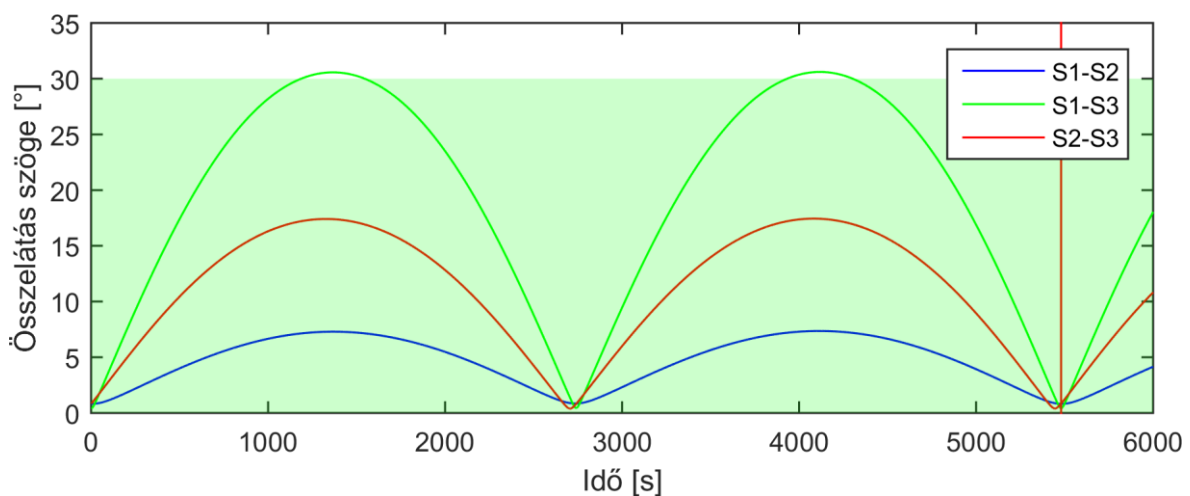
4.4-1. ábra - TRIPEN formáció (felnagyított pályaelemekkel)

A szerző által kreált TRIPEN formáció lényege, hogy a műholdak háromszöget alkotnak, így három irányban történik távolságváltozás mérés, mely a GRACE projekt paralelkör irányú mérési érzéketlenségét hivatott kijavítani a Pendulum formációhoz hasonlóan, de plusz egy mérési irány bevezetésével, ami a geoid modell meghatározás még izotrópabbá tételét eredményezi. A háromszög alakzatot a felszálló csomóponthosszbeli és valódi középanomáliabeli különbség generálja. A formáció lényegében a Pendulum formáció kiegészítése egy harmadik műhoddal. Elsőként a távolságváltozás értékének változása lett megvizsgálva.



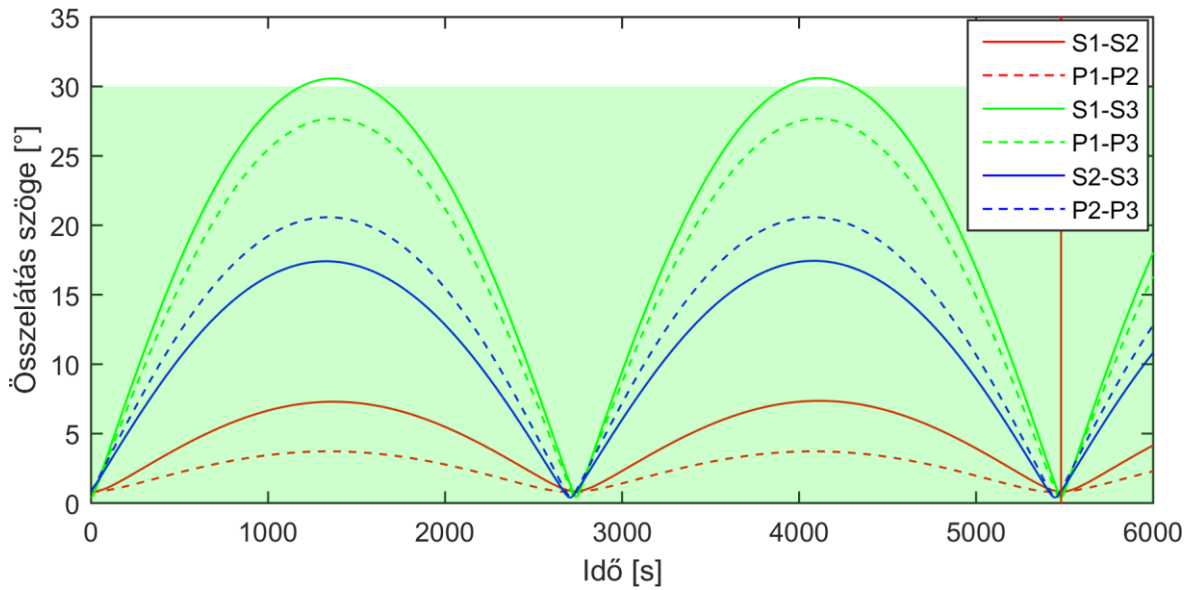
4.4-2. ábra - Távolságváltozás a TRIPEN formáció esetén

Jól látható, hogy az első és harmadik műhold közötti sebességkülönbség mértéke túllépi a feltételekben megszabott értéket. A túllépés maximális mértéke 3.7839 m/s , ahogy az a Pendulum formációnál is tapasztalható volt. Itt azonban ez nem feltétlen jelenti azt, hogy a műhold-formáció nem megvalósítható, hiszen a másik két műhold között a túllépés intervallumában is folytatódik a mérés, így ezekről a területekről is nyerhető adat, ezek pedig az eredetitől eltérő súlyozással beszámíthatóak a geoid modell meghatározásánál.



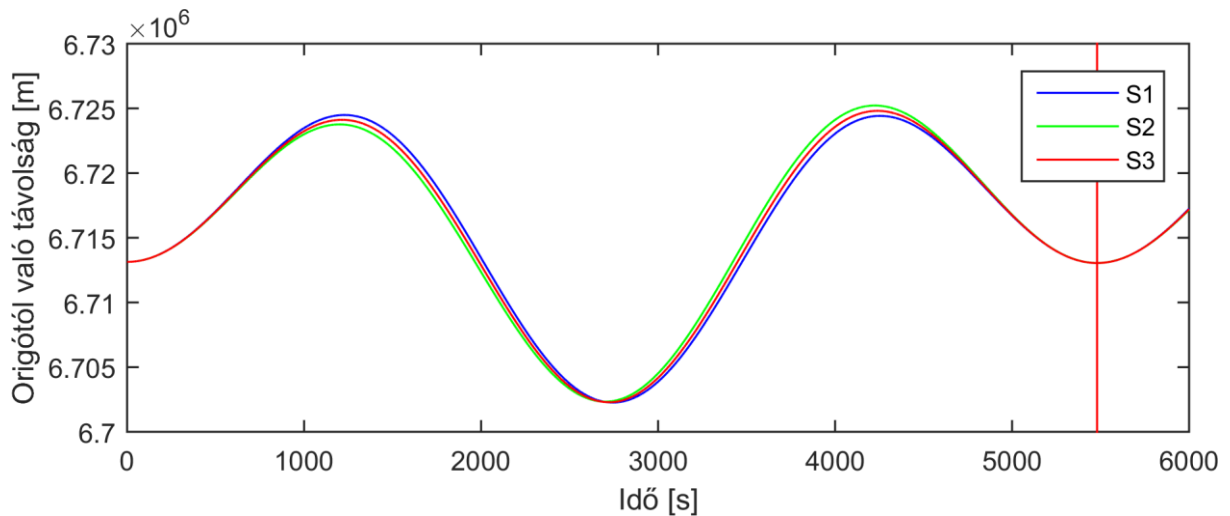
4.4-3. ábra - Az összelátás szögének változása a TRIPEN formáció esetén (csak az új eredmények)

A 4.4-3. ábrán az összelátás szögének változása látható az egyes műholdak között. Egyértelmű, hogy a szög értéke eleget tesz a kritériumoknak az első és harmadik függvény esetében. A második görbe azonban megközelíti a határt, és 3.7839° -kal át is lépi azt. Az előző formációkhoz hasonlóan itt is összehasonlításra kerültek a kapott értékek a korábbiakkal.



4.4-4. ábra - Az összelátás szögének változása a TRIPEN formáció esetén

A két pálya-meghatározási módszerrel kapott pályák adataiból számított összelátási szögek adatsorai itt is jól korrelálnak egymáshoz. A korreláció értéke sorra: $r = 0.9970$, $r = 0.9998$ és $r = 0.9998$, mely mind igen erős kapcsolatnak tekinthető.



4.4-5. ábra - Az origótól való távolság változása a TRIPEN formáció esetén

Az műholdpozíciók origótól való távolsága, valamint a Pendulum formációnál kapott értékekhez hasonlóan alakultak. A koordinátarendszer középpontjától való távolság itt is $91m$ -rel csökkent egy periódus alatt.

5 Konklúzió

A pontszerű tömeg körüli keringés szimulációjának használhatóságát illetően az eredmények biztatóak, de tervezéshez való használatukhoz szükség van az összehasonlítások közben empirikus úton szerzett tudásra. Fontos a korábbi elemzések eredményének, illetve a két különböző módon nyert adatsorok eltérésének, és az eltérések viselkedésének ismerete. Mindezek ismeretében már kijelenthető, hogy ez az egyszerűbb számítási módszer használható műhold-formációk előzetes tervezéshez, valamint azok korrigálásának vizsgálatához is. A tesztelések közben kiderült, hogy két módszerrel számított pozíciókból előállított további értékek ugyanúgy reagálnak a pályaelemekben bekövetkezett változásokra, vagyis egyirányú arányosság áll fent köztük.

Az egyes műhold-formációk megvalósíthatóságát illetően biztatóak az eredmények. Amennyiben műholdakon lévő interferometrián alapuló távolságmérő műszerek technológiai korlátai kibővíthetőek, úgy lehetőség nyílik a Pendulum formáció megvalósítására, hiszen itt az egyetlen probléma a távolságváltozás feltételekben megszabott értékének túllépése. Egy másik megoldás a Kepler-féle pályaelemek módosítása, míg a kritikus értékek a megszabott intervallumokon belülre nem kerülnek.

A Bender formációról elmondható, hogy amennyiben a GRACE Follow-On kísérlet műholdjai pályára kerülnek, semmi akadálya a formáció létrehozásának. Ehhez mindössze egy ugyanilyen műholdpár pályára állításához van szükség egy nagyobb inklinációjú pályán. A kérdés jelen esetben, hogy megéri-e a költségek duplázódását a sokszor említett parallellkör irányú komponens.

A TRIPEN formációnál problémát jelent, hogy az összelátás szögének illetve a távolságváltozásnak értéke túllépi a megszabott intervallumot. Tekintve, hogy a túllépés mindkét esetben az S1 és S3 műholdak között történt így ésszerű változtatást eszközölni ezen két műhold pályaelemeinek különbségeiben vagy számításba vehető a 4.4 fejezetben leírt módszer a hiányzó mérések pótlására. Bár a Pendulum formációhoz képest háromszorozódnának a mérési eredmények – ami nagyobb számítási teljesítményt és adattárolást igényel –, ebben az esetben sokkal változatosabb irányú mérésekből tudnánk előállítani a geoid modellt.

Jelen pillanatban a következő cél a műhold-formációk pályaelemeinek további finomítása a legmegfelelőbb értékek meghatározása érdekében. A két számítási módszer közötti kapcsolat felállításával a továbbiakban sokkal egyszerűbb lesz a módosított értékek tesztelése, ami jelentős időbeli előnyt jelent. Miután pedig sikerült megtalálni a pályaelemek megfelelő értékét sor kerülhet a kutatás következő lépésére, melynek lényege a mérések

szimulációja az egyes formációk esetén. Kivizsgálásra kerül, hogy bizonyos mintavételezések milyen adatsorokat eredményeznek. Ezekre az adatsorokra pedig a GRACE specifikációknak megfelelő zaj kerül. Ezt követően számítható, hogy az így nyert mérésekből milyen megbízhatósággal állítható vissza a szimuláció során használt nehézségi erőter modell.

Felhasznált irodalom

- ¹ Swenson and Wahr: Post-processing removal of correlated errors in GRACE data. Geophysical Research Letters, 2006
- ² Szántó Marcell: Gravimetria célú műhold-konstelláció tervezése, TDK dolgozat, ÓE Alba Regia Műszaki Kar, 2016
- ³ Günter Seeber: Satellite Geodesy, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003, 83. p.
- ⁴ Günter Seeber, i.m.[3], 100. p.
- ⁵ Günter Seeber, i.m.[3], 101. p.
- ⁶ Somodi Balázs: Numerikus integrálási módszerek vizsgálata geodéziai műholdak pályájának meghatározására, TDK dolgozat BME Építőmérnöki Kar, 2008
- ⁷ Bányai L.: A Mesterséges Holdak Pályameghatározása, Oktatási Segédlet, Sopron, 2001
- ⁸ Bányai L. i.m. [7]
- ⁹ William M.Kaula, Theory of Satellite Geodesy, 1966
- ¹⁰ Reubelt, T., Sneeuw, N., Iran Pour, S., Hirth, M., Fichter, W., Müller, J., Brieden, Ph., Flechtner, F., Raimondo, J.-C., Kusche, J., Elsaka, B., Gruber, T., Pail, R., Murbock, M., Doll, B., Sand, R., Wang, X., Klein, V., Lezius, M., Danzmann, K., Heinzl, G., Sheard, B., Rasel, E., Gilowski, M., Schubert, C., Schafer, W., Rathke, A., Dittus, H. and Pelivan, I.: Future Gravity Field Satellite Missions, In: F. Flechtner, N. Sneeuw and W.-D. Schuh (Eds), Observation of the System Earth from Space-CHAMP, GRACE, GOCE and Future Missions. Geotechnologien Science Report No. 20, Series "Advanced Technologies in Earth Sciences", Springer, Berlin, 165-229, 2014